TD 36 : Univers et probabilités

Probabilité sur un univers

1 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [\![-n,n]\!]$. On considère l'application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbb{P}(\{k\}) = \dfrac{n+1-|k|}{(n+1)^2}$.

1) Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.
2) Déterminer la probabilité de l'événement $A = [\![-n+1,n-1]\!]$.

2 ★★ On lance un dé à six faces truqué : la probabilité d'obtenir $k \in [\![1,6]\!]$ est proportionnelle à k. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Dénombrements et probabilités

3 ★★☆ Soit $b,n \in \mathbb{N}^*$. On tire simultanément deux boules dans une urne qui contient b boules blanches et n boules noires. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées aient la même couleur ?

4 ★★ Un facteur entre dans un immeuble et doit distribuer n lettres, une exactement pour chacune des n boites aux lettres. Mais il est pressé et distribue les lettres au hasard : une dans chaque boite.

1) Donner un univers Ω correspondant à cette expérience.
2) Quelle est la probabilité que la distribution soit correcte ?
3) Quelle est la probabilité que la boite 1 soit correctement remplie ?
4) Quelle est la probabilité que la boite 1 ne contienne pas de lettre destinée à d'autres boites aux lettres ?
5) Reprendre les questions précédentes, en supposant cette fois qu'une même boite est susceptible de recevoir plusieurs lettres, tandis que d'autres peuvent n'en recevoir aucune.

5 ★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une loterie, il y a n tickets dont g tickets gagnants ($1 \leq g \leq n$). Quelle est la probabilité d'obtenir un ticket gagnant en achetant a tickets ($1 \leq a \leq n$) ?

Conditionnement

6 ★★☆ Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour (jour 1), il ne fume pas. On suppose ensuite que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

- La probabilité qu'il fume le jour $j+1$ sachant qu'il n'a pas fumé le jour j est égale à $\alpha \in \left]0,1\right[$.
- La probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ sachant qu'il a fumé le jour j est égale à $\beta \in \left]0,1\right[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le fumeur n'a pas fumé le jour n », et on note p_n sa probabilité.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
2) En déduire une expression de p_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Étudier la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

7 ★★☆ Un candidat répond à un QCM où chaque question comporte n réponses possibles. Soit l'étudiant connait la réponse et la coche, soit il choisit au hasard une réponse parmi les n proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse est $p \in \left]0,1\right[$.
Si l'étudiant a bien répondu à la question, quelle est la probabilité qu'il y ait répondu en connaissant la réponse ?

8 ★★ Un groupe de colle de 3 élèves passe une colle de maths. Ils doivent chacun répondre à une question de cours, parmi 6 proposées. Le premier élève tire au hasard une des 6 questions, puis le deuxième tire une des 5 restantes et le dernier une des 4 restantes. Vous êtes l'un des élèves et vous avez fait l'impasse sur une des questions. On vous propose de choisir votre place. Choisissez-vous la première ? la deuxième ? ou la troisième ?

Indépendance

9 ★ On lance un dé à six faces équilibré. On pose les événements

A : "on obtient 2, 4 ou 6" et B : "on obtient 3 ou 6"

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

10 ★★ Trouver un univers Ω et trois événements A, B, C tels que A et B sont indépendants, A et C sont indépendants mais A et $B \cup C$ ne sont pas indépendants.

11 ★★★ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A_1, \cdots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants qui vérifient $\mathbb{P}(A_k) \in \left]0, 1\right[$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\text{card}(\Omega) \geq 2^n$.